ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ , Φεβρουάριος 2014

Θέμα 1.
Να δοθεί ο ορισμός του χώρου μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και να αποδειχθεί ότι για κάθε ακολουθία συνόλων $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στην $\mathcal{A}$ ισχύει $\mu\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

Θέμα 2.
Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια αύξουσα ακολουθία μέτρων στον $(X, \mathcal{A})$ [δηλαδή για κάθε $A \in \mathcal{A}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A)$]. Ορίζουμε $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ με τύπο $\mu(A) = \lim\limits_{n} \mu_n(A)$. Να αποδειχθεί ότι το μ είναι επίσης ένα μέτρο.

Θέμα 3.
Έστω $a < \beta$ και $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Να δειχθεί ότι το σύνολο $G = \{(x, f(x)) : x \in [a, \beta]\}$ έχει μηδενικό μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^2$. [Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε το γεγονός ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.]

Θέμα 4.
Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f, g : X \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις ώστε το σύνολο $[f \neq g]$ (δηλαδή το σύνολο $\{x \in X : \ f(x) \neq g(x)\}$) να είναι $\mu-$μηδενικό. Να δειχθεί ότι αν η f είναι $\mu-$μετρήσιμη τότε και η g είναι $\mu-$μετρήσιμη.

Θέμα 5.
Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Να δοθούν οι ορισμοί των παρακάτω εννοιών:
α) Μετρήσιμη συνάρτηση.
β) Απλή μετρήσιμη συνάρτηση και ολοκλήρωμα απλής μετρήσιμης συνάρτησης.
γ) Ολοκλήρωμα μιας μετρήσιμης συνάρτησης $f : X \to [0, +\infty]$.
δ) Ολοκλήρωμα μετρήσιμης συνάρτησης $f : X \to [-\infty, +\infty]$.

Θέμα 5.
Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \to [+\infty]$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ από τον τύπο

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu.$$

Να δειχθεί ότι:
α) Το ν είναι μέτρο.
β) Αν $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = 0$ τότε $\nu(A) = 0$.

Καλή Επιτυχία!